

# Thema: Dynamische Geometrie Software

## 1. Allgemeines

Die *Dynamische Geometrie* ist ein Zweig der Mathematik und geht aus der allgemeinen Geometrie hervor. Sie beschäftigt sich mit verschiedenen Figuren der Geometrie. So zum Beispiel mit Körpern und ihren Bewegungen im Raum, mit Geraden und mit Vielecken. Dadurch entwickeln sich vielseitige Einsatzgebiete.

Die *Einsatzgebiete* der Dynamischen Geometrie sind in verschiedenen Bereichen der Wissenschaft nutzbar. So wird sie beispielsweise als Vorbote in der Konstruktion von neuen flippigen Gebäudebauten verwendet, genauso wie in der Konstruktion von neuen ausgefeilten Jahrmarktskarussellen. Eine besondere Rolle spielt sie aber in der Experimentierwissenschaft, zum Beispiel in der Physik und Mathematik. Durch die Dynamische Geometrie werden neuen Möglichkeiten eröffnet, die Entwicklern, in verschiedensten Bereichen der Industrie, neue Möglichkeiten bieten. Allein im Fahrzeugbau konnten neue Formen und Stile entwickelt werden, die dem Hersteller eine eigene Note gaben, da unterschiedlichste Körper verarbeitet und im Zusammenspiel betrachtet werden konnten. All dieses gelang besonders durch den Einsatz von Computerunterstützter Software. So konnten durch den Einsatz geeigneter Computerprogramme neue Aspekte in den Geometrieunterricht an Schulen und Hochschulen eingebracht werden. Durch den immer größer werdenden Anspruch an die Dynamische Geometrie war eine Verarbeitung und Benutzung durch benutzerfreundliche Software unumgänglich. So kam es zur Entwicklung von Dynamischer Geometrischer Software.

Die *grundsätzliche Logik* einer solchen *Dynamischen Geometrie Software* (DGS) sollte möglichst folgende Aspekte vorweisen:

- Eine einfache Lösung geometrischer Grundprobleme (da für Hobbymathematiker, interessierte Schüler, etc.)
- Möglichkeit, mittels Mausclicks Konfigurationen der Elementargeometrie zu erstellen, welche anschließend in einem „Zug-Modus“ dynamisch variiert werden können.
- Eine Auswertung der Konstruktionsschritte mittels derselben Applikation.
- Zur Verfügung stellen von geometrischen Primitivoperationen (die das Einzeichnen von einfachen Konstruktionsschritten ermöglicht)

## 2. Übersicht über themenrelevante Applikationen

### 2.1 Euklid

Kurze Beschreibung: Shareware-Programm, welches von Roland Mechling entwickelt wurde

Quelle: <http://www.uni-essen.de/hrz/beratung/hrzblatt/hrz151/dyngeometrie.html>

Leistungsparameter:

Architektur:

- übersichtliche Menü-Führung
- schnelles Wechseln zwischen vier verschiedenen Symbolleisten
- Hilfestellung genannt „Ballonhelps“
- Konkrete Anweisungen zum Programm in Statuszeile

Einsatzgebiete: Schule und Hochschulen

Internet Link: <http://home.t-online.de/home/roland.mechling>

Arbeitsweise: Setzt man einen Punkt, noch einen Punkt, eine Gerade durch die beiden Punkte, usw., und wählt eine Konstruktionsart (z.B. "Punkt auf eine Gerade setzen") aus, gilt bei diesem Programm immer nur ein einmaliges Durchführen dieser Konstruktion. Das hat zwei **Vorteile**: Erstens führt es zu weniger Fehlern, da man sich jedesmal neu entscheiden muß, welche Konstruktion man ausführen will. Zweitens wird das Programm

nach jeder einzelnen Konstruktion in einen Modus versetzt, in dem man die Objekte anpacken und bewegen kann. Die geometrischen Verknüpfungen ("Punkt liegt auf Gerade") bleiben bei diesen Bewegungen natürlich erhalten. Dieses wird auch als "Zug-Modus" bezeichnet. Eine weitere Funktionalität ist das Erzeugen von "Ortslinien". Bei Euklid klickt man zunächst auf "Ortslinie aufzeichnen". Danach wird man aufgefordert, den Punkt auszuwählen, dessen Ortslinie man aufzeichnen möchte. Jetzt ist man wieder im "Zugmodus". Bewegt man nun einen Basispunkt, hinterläßt der Aufzeichnungspunkt eine Spur aus vielen Einzelpunkten.

## 2.2 Zirkel und Lineal

Kurze Beschreibung: *Public-Domain-Programm*, entwickelt von Dr. R. Grothmann

Quelle: <http://www.uni-essen.de/hrz/beratung/hrzblatt/hrz151/dyngeometrie.html>

Leistungsparameter:

Einsatzgebiete: Schule und Hochschulen

Internet Link: <http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/car.html>

Arbeitsweise: Die Konstruktionsmöglichkeiten von "Zirkel und Lineal" sind im wesentlichen die gleichen wie bei Euklid. Lediglich die Handhabung ist etwas anders. Im Gegensatz zu Euklid ist hier eine Konstruktionsmethode solange eingestellt, bis man eine andere wählt, oder bis man z.B. auswählt, daß man die Objekte bewegen möchte. Ortslinien werden wie bei Euklid aufgezeichnet. Es werden aber nicht einzelne Punkte gezeichnet, sondern Polygone. Das sieht zunächst etwas ansprechender aus. Fährt man beim Aufzeichnen der Linie aber etwas zu schnell, können Teile der Kurve abgeschnitten werden (d.h. die Kurve nimmt Abkürzungen und wird eckig). Die Beschriftungsmöglichkeiten sind hier etwas eingeschränkt.

## 2.3 Geolog

Kurze Beschreibung: Kommerzielles Programm, entwickelt von Gerhard Holland

Quelle: <http://www.uni-essen.de/hrz/beratung/hrzblatt/hrz151/dyngeometrie.html>

Leistungsparameter: Programm enthält neben eigentlichen GEOLOG noch die Systeme GEOCON, GEOPROOF und GEOEXPERT  
- dabei sind GEOCON und GEOPROOF zwei "Task-orientierte Tutorien-Systeme"  
- mit GEOEXPERT wird das Erstellen von GEOCON- und GEOPROOF-Tutorien unterstützt.

Einsatzgebiete: Hochschulen

Internet Link: <http://www.uni-giessen.de/math-didaktik/holland.html>

Arbeitsweise: Die verschiedenen Konstruktionsmöglichkeiten sind in Gruppen zusammengefaßt. Man klickt z.B. zunächst auf "Punkt einfügen" und entscheidet in einem Untermenü um welche Art Punkt es sich handeln soll, also ein frei platzierter Punkt, ein Punkt auf einer Linie oder der Schnittpunkt von zwei Linien. Brauchbar ist z.B. der "Autoname"-Modus der den Objekten automatisch Namen gibt (A, B, C, a, b, c, ...) und sie beschriftet. Die durchgeführte Konstruktion wird in einem "Programm"-Fenster protokolliert und man könnte die Konstruktion auch mit eingetippten Kommandos fortführen. Das Erzeugen von Ortskurven gelingt hier nicht so unmittelbar wie bei den beiden vorherigen Programmen. Schaut man sich mitgelieferte Beispiele an, wird klar, daß die Philosophie hier etwas anders ist. In der Kommandodatei des Beispiels wird z.B. der Radius eines Kreises in Abhängigkeit einer anderen Größe arithmetisch (also nicht geometrisch) definiert und die Ausgangsgröße in einer Animation variiert. Dabei werden die Positionen eines ausgewählten Punktes bei jedem Animationsschritt aufgezeichnet.

## 2.4 Cabri Geometre II

Kurze Beschreibung: kommerzielles Programm, welches bei Macintosh erstmals erschien  
Quelle: <http://www.uni-essen.de/hrz/beratung/hrzblatt/hrz151/dyngeometrie.html>

Leistungsparameter: - Benutzeroberfläche besitzt wenige Buttons  
- Funktionalität sehr hoch, da die ausgewählten Zeichenoperationen immer kontextbezogen interpretiert werden  
- etwas ungewöhnliche und schwierige Bedienung  
- neben Kreisen gibt es auch allgemeine Kegelschnitte (also Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln) als Objekte

Einsatzgebiete: Schule und Hochschulen

Internet Link: <http://www-cabri.imag.fr/> und <http://www.ti.com/calc/docs/cabriwin.html>

Arbeitsweise: Fährt man mit dem Mauszeiger über das Bild, wird immer angezeigt, welches Objekt fokussiert ist ("Dieser Strahl", "Dieser Punkt"). Hierbei werden auch Schnittpunkte erkannt, ohne daß man vorher in einer gesonderten Operation den Schnittpunkt als Objekt eingefügt hat. Trotzdem fehlen zunächst einige Operationen. Irgendwann merkt man dann, daß sich hinter jedem Menü-Button ein kleines Untermenü verbirgt, das nur erscheint, wenn man den Knopf etwas länger geklickt hält. So wechselt man die Bedeutung des Knopfes von z.B. "Gerade zeichnen" auf "Strecke zeichnen". Mehr Einarbeitungszeit benötigt man auch für das Aufzeichnen einer Ortskurve. Zunächst muß man finden, wo sich der entsprechende Menüpunkt hinter einem Knopf verbirgt. Bewegt man sein Gebilde im Zug-Modus, fällt ein entscheidender Unterschied zu den anderen Programmen auf. Nehmen wir ein Beispiel. Wir setzen zwei Punkte und ziehen dadurch eine Gerade. Die Punkte können nun frei bewegt werden, wodurch sich die Gerade entsprechend mitbewegt. Bei den anderen drei Programmen läßt sich die Gerade selbst nicht anfassen und bewegen. Ihre Position ist durch die Punkte eindeutig und fest bestimmt. Anders bei Cabri II. Hier läßt sich auch die Gerade mit der Maus anfassen und bewegen. Dabei bewegen sich die Punkte automatisch mit. Dieses Nachziehen der Punkte ist aber von der Geometrie nicht eindeutig. Schon Figuren mit kleiner Komplexität können einem dabei leicht unvorhersehbar aus den Fugen geraten. Man kann sich aber helfen, indem man Objekte feststeckt. Somit hat man insgesamt flexiblere Möglichkeiten, muß aber eine größere Kompliziertheit in Kauf nehmen.

## 2.5 Geometer's Sketchpad

Kurze Beschreibung: kommerzielles Programm, angeboten von KeyCurriculum Press Verlag  
Quelle: <http://www.uni-essen.de/hrz/beratung/hrzblatt/hrz151/dyngeometrie.html>

Leistungsparameter: -

Einsatzgebiete: Hochschulen

Internet Link: <http://www.keypress.com>

Arbeitsweise: Das geometrische Konstruieren erfolgt ähnlich wie bei Cabri II, ist aber nicht ganz so intuitiv. Dinge wie Mittelsenkrechte oder Winkelhalbierende können nicht per Mausklick eingefügt werden, sondern müssen "wie es im Buche steht" konstruiert werden. Ortslinien konnten mit der Demoversion nicht erzeugt werden. Vermutlich muß man dazu auf die Programmiermöglichkeiten von Sketchpad zurückgreifen. Mit diesen "Programm-Scripts" kann man wohl noch eine Menge machen, wie das reichhaltige Beispielmateriale zeigt. Hierbei wird ein sehr großer Teil der visuellen Mathematik abgedeckt. Z.B. lassen sich Kurven (z.B. arithmetische Funktionen) in einem Koordinatensystem darstellen und interaktiv animieren. In die Konstruktionen können Objekte aus anderen Anwendungen OLE-mäßig eingebunden werden. Aus den Beispielen geht ebenfalls hervor, das man Flächen farbige füllen kann. Wie es geht, war aber nicht festzustellen. Von den anderen Programmen hat nur Geolog ebenfalls diese Funktionalität.

## Zusammenfassung

Wer einmal ein wenig mit der dynamischen Geometrie herumprobieren möchte, oder sich geometrische Sachverhalte klarmachen will, ist mit "Zirkel und Lineal" gut beraten. Außerdem ist es kostenlos. Will man das Programm etwas professioneller einsetzen, z.B. für die Unterrichtsvorbereitung, zum Erstellen von Graphiken für Scripte oder Publikationen, oder will man das Programm direkt im Unterricht verwenden, wird man sich eher für das Shareware-Programm Euklid entscheiden. Man kann seine Beispiele besser graphisch gestalten und beschriften, die Benutzerführung ist sehr ansprechend und (z.B. für Schüler) leicht zu verstehen. Die beiden kommerziellen Programme Geolog und Cabri II bieten eine größere Gesamtfunktionalität, die man sich aber mit einer schwierigeren Handhabung erkauft. Man sollte hier genau hinsehen, welche Dinge man wirklich haben will. Geolog ist vielleicht durch seine algorithmischen Funktionalitäten interessant, und Cabri II eher durch seine erweiterten geometrischen Möglichkeiten. Wenn es um das reine geometrische ad hoc Konstruieren geht, scheint das Programm Geometer's Sketchpad hinter den anderen zurückzuliegen. Für die Vorbereitung von interaktiven Unterrichtsmaterial bietet es dem Eingearbeiteten aber sehr viele Möglichkeiten, die auch ein größeres mathematisches Anwendungsfeld abdecken, als die anderen vier Programme.

### 3. Genauere Beschreibung einer Applikation

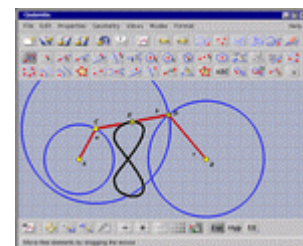
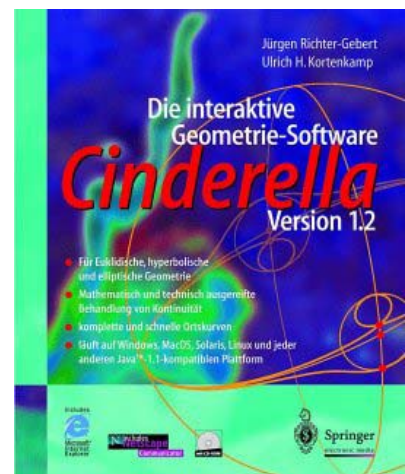
Nähere Beschreibung zu: **Cinderella**

#### **Kurzbeschreibung:**

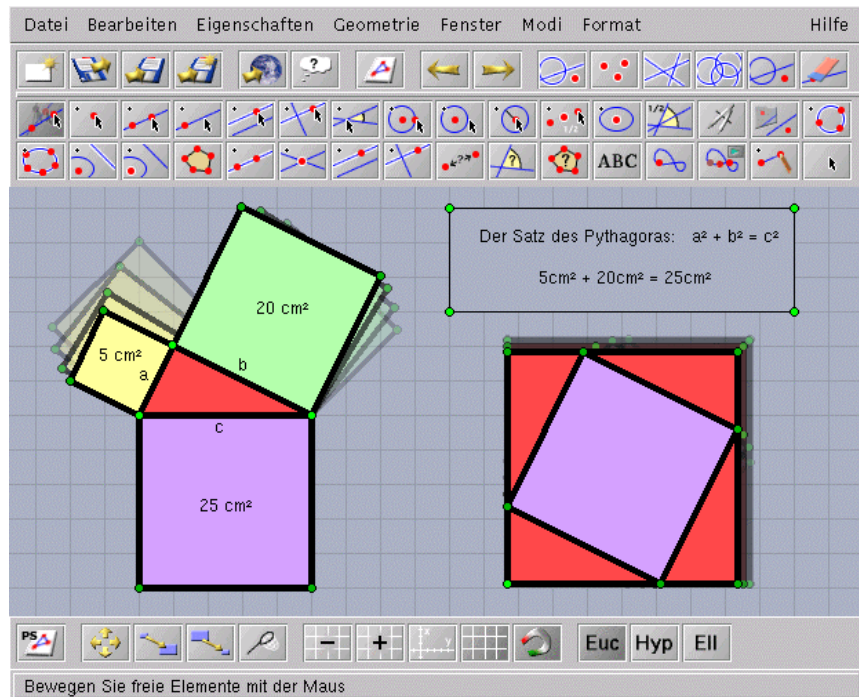
Cinderella ist eine einzigartige, technisch ausgereifte interaktive Geometrie-Lernsoftware, die sich auszeichnet für Studenten zum Erlernen der Euklidischen, projektiven, sphärischen und hyperbolischen Geometrie eignet. Aufgrund seines leistungsfähigen mathematischen Kerns kann Cinderella jedoch ebenfalls als Werkzeug für Wissenschaftler in der Forschung auf dem Gebiet der Geometrie und Komplexitätstheorie Anwendung finden. Die Software enthält einen eingebauten automatischen Beweiser für geometrische Sätze. Durch eine einfache Exportfunktion kann Cinderella als Werkzeug zum Gestalten von WWW-Seiten oder als Hilfe bei der Ausarbeitung interaktiver Geometrie-Bücher genutzt werden.

Cinderella ist ein Programm für Geometrie auf dem Computer, entwickelt mit dem Anspruch, mathematisch robust und dennoch einfach zu benutzen zu sein.

Cinderella ist ein Computerprogramm für Dynamische Geometrie (DGS). Sie erstellen mit der Maus eine einzelne Zeichnung, bestehend aus Punkten, Geraden, Kreisen, Kegelschnitten und Polygonen, und der Computer speichert automatisch die Konstruktionsschritte.



Diese Konstruktionsbeschreibung kann nun automatisch "abgespielt" werden. Im sogenannten **Zugmodus** können freie Punkte und Geraden verschoben werden, und der Rest der Zeichnung läuft automatisch mit. So kann zum Beispiel der Schnittpunkt der Höhen nicht nur in einem Dreieck beobachtet werden, sondern in einem ganzen Kontinuum.



Cinderella ist ein Programm für geometrische Konstruktionen auf dem Computer. Anders als bei herkömmlichen Zeichenprogrammen merkt sich das Programm allerdings

nicht nur ein statisches Bild, sondern behält die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Konstruktionselementen. So kann zum Beispiel eine Gerade, die Verbindungsgerade zweier Punkte sein, die Senkrechte durch einen Punkt auf eine andere Gerade, oder die Tangente an einem Kreis. So wird ermöglicht, die Zeichnung nachträglich interaktiv zu verändern, indem frei positionierte Punkte verschoben werden, und der Rest der Zeichnung automatisch nachgeführt wird. Geometrie wird erfahrbar.

Da Cinderella vollständig in Java geschrieben wurde, ist es sogar möglich, solche Konstruktionen im World Wide Web zu veröffentlichen. Innerhalb einer WWW-Seite können fertige Animationen, frei bewegbare Konstruktionen und sogar Konstruktionswerkzeuge bereitgestellt werden, womit die Grundlage für interaktive Bücher auf CD-ROM und im Internet geschaffen wurde.

Die Idee Computer zu nutzen, um geometrische Sachverhalte "in Bewegung" zu visualisieren, ist keineswegs neu. Bereits Mitte der achtziger Jahre erschienen die ersten kommerziellen Programme zur dynamischen Geometrie (*Geometer's Sketchpad* und *Cabri Géomètre*). Heutzutage gibt es weltweit schätzungsweise 45 Programme mit vergleichbarer Zielsetzung. Man kann sich leicht fragen, ob bei einer solchen Masse an verfügbaren Programmen nicht längst alle Probleme in diesem Bereich sowohl in mathematischer als auch informatischer Hinsicht gelöst sein sollten und keine prinzipiell neuen Entwicklungen zu erwarten seien. In gewisser Weise ist genau das Gegenteil der Fall: praktisch alle Programme leiden an ähnlichen konzeptionellen Schwachpunkten, die unweigerlich in gewissen Situationen zu mathematischen oder inkonsistentem Verhalten führen. Erst in jüngster Zeit gelang eine eingehende mathematische Analyse und Erklärung dieser Effekte, auf deren Grundlage sich vollkommen neuartige Implementierungsparadigmen entwickeln lassen (die eine weitestgehende Vermeidung solcher Inkonsistenzen gewährleisten). In manchen Aspekten steht somit das Feld der dynamischen Geometrie mitten in einer "Neudefinition", bei der grundlegende Fragen der mathematischen Modellierung im Vordergrund stehen.

Ein anderer Aspekt hat in den letzten Jahren eine weitere Veränderung des Mainstreams im Bereich dynamische Geometrie bewirkt. Das Internet und die allgegenwärtige Erreichbarkeit von Computern eröffnet die Möglichkeit dynamische Zeichnungen zunehmend zur *Kommunikation* von Geometrie einzusetzen. Während noch vor wenigen Jahren proprietäre

Datenformate dominierten und Publikationen, die sich dynamischer Visualisierungsmöglichkeiten bedienten, meist mit Begleitdisketten ausgeliefert wurden, geht heutzutage der Trend in Richtung nahtloser WWW Integration. Ausgehend von dem Anspruch ein dynamisches Geometrieprogramm zu schreiben, welches ein Maximum an mathematischer Konsistenz gewährleistet, begann im August 1996 mit der Entwicklung des Programmes *Cinderella*. Ziel war es hierbei in einer engen Verflechtung von Grundlagenforschung und Implementierungsarbeit die Grenzen dynamischer Geometrie auszuloten. Es stellte sich heraus, dass eine mathematisch zufriedenstellende Implementierung Konzepte sowohl der *projektiven Geometrie* als auch der *komplexen Analysis* einbeziehen musste. Hierbei ist es wichtig zu beachten, dass diese Theorien in der Implementation zwar berücksichtigt werden müssen, dass aber der Benutzer keineswegs damit vertraut sein muss.

Vielmehr arbeitet die Mathematik im Hintergrund und gewährt einen reibungslosen Ablauf des Zugmodus (ähnlich wie man als Autofahrer nicht wissen muss wie das ABS der Bremsen funktioniert).

Eine weitere Anforderung, war von Anfang an auf eine möglichst nahtlose Internetintegration hinzuarbeiten. *Cinderella* ist von daher komplett in Java geschrieben und erlaubt die einfache Einbindung von Zeichnungen als Applets in HTML-Seiten, die man ohne weitere Hilfsmittel mit einem gängigen Browser (z.B. *Netscape* oder *Internet Explorer*) betrachten kann. Weiterhin wurde versucht neue Möglichkeiten die sich durch das Anbieten dynamischer Geometrie im Internet ergeben, auszuschöpfen. So ist es z.B. möglich, mit Hilfe des Programms Geometrie Aufgaben mit vollautomatischer Lernkontrolle anzubieten. Die Lernkontrolle wird hierbei von einem *Automatischen Beweiser* durchgeführt, welcher wiederum entscheidend auf der mathematischen Theorie basiert. Insbesondere ergeben sich hierbei neue Möglichkeiten für den Bereich des Teleteaching bzw. Distance Learning.

*3 klassische Einsatzfelder:* dynamischer Geometrie im Bereich des Geometrieunterrichts

- **Erstellen von Zeichnungen**
- **Geometrisches Experimentierfeld**
- **Vermitteln von Wissen**

### **1. Erstellen von Zeichnungen**

Angenommen, Sie schreiben an einer Publikation wie dieser und wollen sie mit geometrischen Bildern anreichern. Womöglich kommt es Ihnen sogar noch darauf an, einen bestimmten geometrischen Sachverhalt möglichst prägnant in einem statischen Bild darzustellen.

### **2. Geometrisches Experimentierfeld**

Der Einsatz dynamischer Geometrie ermöglicht auch das Gewinnen neuer Erkenntnisse. Man kann das Programm einfach als eine Art geometrischer Taschenrechner benutzen, welcher es gestattet, qualitative und quantitative Aussagen über geometrische Sachverhalte zu erlangen. Hierbei muss es sich nicht notwendigerweise um rein mathematische Fragestellungen handeln. Auch weite Bereiche der Physik (insb. der Mechanik und Optik) lassen sich adäquat auf geometrische Modelle abbilden. So kann man z.B. relativ einfach die Kinematik bestimmter Gelenkmechanismen explorieren oder auch z.B. einem Schüler eine vorgefertigte Konstruktion quasi als virtuelles Labor zur Verfügung stellen.

### **3. Vermitteln von Wissen**

Auf diesen naheliegenden Aspekt soll hier nur ganz kurz eingegangen werden. Die Möglichkeiten dynamischer Geometrie bei der Vermittlung von Wissen sind überaus vielfältig. Sie reichen vom Bereitstellen vorgefertigter Konstruktionen über das interaktive Lösen von Aufgaben bis hin zur Benutzung als Präsentationswerkzeug.